PROGRAMAÇÃO LINEAR

O ALGORITMO SIMPLEX

- 1 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

MIN $F = -X + 2Y$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 3 \\ X + 4Y &\geq 4 \\ -X + Y &\leq 0 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Se ao problema indicado inicialmente se acrescentar a restrição $4X + 2Y \leq 8$, manter-se-á a solução óptima determinada na alínea a) ? Justifique.

- 2 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

Max $F = X + Y$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2X + Y &\geq 10 \\ X + 2Y &\leq 14 \\ 2X - 2Y &\leq 5 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Se ao problema inicial se acrescentar a condição "X, Y inteiros", qual a sua solução ? (Utilize a resolução gráfica da alínea a))

c) Admita que, relativamente ao problema inicial, se altera o objectivo para Max $F = \theta X + Y$, com $\theta \in R$.

Utilizando a resolução gráfica da alínea a), resolva este problema de P.L. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

d) Admita que, relativamente ao problema inicial, se acrescentou a condição "X, Y inteiros" e se alterou o objectivo para Max $F = \theta X + Y$, com $\theta \in R$.

Resolva este problema de P.L.I. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

- 3 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\text{Max } F = X + 2Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 3 \\ -X + Y &\leq 1 \\ X &\leq 2 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Admita que o termo independente da 1ª restrição passa a ser θ ($\theta > 0$). A partir da resolução gráfica da alínea anterior, resolva o problema de Programação Linear Paramétrica resultante.

- 4 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\text{MAX } F = X + Y$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 8 \\ X &\leq 6 \\ Y &\leq 5 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica da alínea anterior, identifique a base óptima deste problema.

- 5 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\textbf{M??} \;\; F = X + Y$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 8 \\ X &\leq 6 \\ Y &\leq 5 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Sabendo que este problema admite múltiplas soluções óptimas,

a) Indique, justificadamente, se se trata de um problema de maximização ou de minimização.

b) Resolva o problema.

c) Indique a solução óptima correspondente a $X^* = 4$. Tratar-se-á de uma solução básica ? Justifique.

- 6 -

Considere o espaço de soluções admissíveis, S, definido por:

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &\leq 30 \\ X + 3Y &\geq 18 \\ Y &\leq 5 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Relativamente ao espaço de soluções admissíveis S, complete:

a) Se o objectivo for MAX $F = 1X + 3Y$ a solução óptima será

(X^*, Y^*) = ________________________________ , com F^* = __________.

b) Se o objectivo for MIN $F = 1X + 3Y$ a solução óptima será

(X^*, Y^*) = ________________________________ , com F^* = __________.

c) Se o objectivo for M___ $G = 2X$ _____ Y a solução óptima será

$(X^*, Y^*) = (12, 2)$, com G^* = __________.

d) Se o objectivo for M___ H = _____ $X - 6Y$ a solução óptima será

$(X^*, Y^*) = (12, 2) + (1 - \lambda)(15/2, 5), \quad \lambda \in [0, 1]$.

- 7 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\le 8 \\ X + Y &\ge 5 \\ -X + Y &\le 3 \\ X - Y &\le 3 \\ X, \ Y &\ge 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica da alínea anterior, identifique a base óptima deste problema.

- 8 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + 5Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\le 10 \\ X + 2Y &\le 12 \\ X + 3Y &\le 15 \\ X, \ Y &\ge 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica do problema dado, indique, justificando sucintamente, quais as variáveis que pertencem à base óptima do problema.

c) Admita que, relativamente ao problema inicial, se altera o objectivo para Max $F = \theta X + 5Y$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

Utilizando a resolução gráfica da alínea a), resolva este problema de P.L. Paramétrica, em função do parâmetro θ.

d) Admita que, relativamente ao problema inicial, se acrescentou a condição "X, Y inteiros" e se alterou o objectivo para Max $F = \theta X + 5Y$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

Resolva este problema de P.L.I. Paramétrica, em função do parâmetro θ.

- 9 -

Considere o seguinte problema de optimização:

Max $F = 5X + 6Y$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &\leq 16 \\ 3X + 2Y &\leq 17 \end{aligned}$$

a) Recorrendo ao Método Gráfico, resolva-o considerando:

i)	$X, Y \geq 0$	(Programação Linear)
ii)	$X, Y \geq 0$ <u>**e**</u> X inteira	(Programação Linear Mista)
iii)	$X, Y \geq 0$ <u>**e**</u> Y inteira	(Programação Linear Mista)
iv)	$X, Y \geq 0$ <u>**e**</u> X, Y inteiras	(Programação Linear Inteira)

b) Compare os resultados obtidos na alínea anterior.

- 10 -

Apresentando exemplos <u>simples</u> de resoluções gráficas relativas a um problema **A** de **Programação Linear** e do correspondente problema **B** de **Programação Linear Inteira** (que se obtém a partir de A, com a exigência da integralidade das variáveis), indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

I) Se **A** e **B** admitem soluções óptimas únicas, então a solução óptima de **B** é, de entre as soluções admissíveis inteiras, a "mais próxima" da solução óptima de **A**.

II) Se **A** admite pelo menos uma solução óptima, então **B** também admite pelo menos uma solução óptima.

III) Se **B** admite pelo menos uma solução óptima, então **A** também admite pelo menos uma solução óptima.

IV) Se **A** admite uma solução óptima única, então **B** também admite uma solução óptima única.

V) Se **A** admite múltiplas soluções óptimas, então **B** também admite múltiplas soluções óptimas.

VI) Se **A** e **B** não forem impossíveis e se **A** admite uma solução óptima única, então **B** também admite uma solução óptima única.

VII) Se **A** e **B** não forem impossíveis e se **A** admite múltiplas soluções óptimas, então **B** também admite múltiplas soluções óptimas.

VIII) Se **B** admite uma solução óptima única, então **A** admitirá pelo menos uma solução óptima.

IX) Se **A** admite uma solução óptima única, então **B** admitirá pelo menos uma solução óptima.

X) Se **A** e **B** não forem impossíveis e se **A** admite uma solução óptima única, então **B** admitirá pelo menos uma solução óptima.

XI) Se **A** e **B** não forem impossíveis e se **B** admite uma solução óptima única, então **A** admitirá pelo menos uma solução óptima.

XII) Se **A** e **B** não forem impossíveis, o valor óptimo da função objectivo do problema **B** é sempre pior que o valor óptimo da função objectivo do problema **A**.

- 11 -

Complete o seguinte "Quadro do Simplex" de modo a que corresponda a uma solução básica degenerada óptima e única .

	X	Y	Z	F1	F2	F3	TI
?	0	?	1	?	0	2	?
Y	1	?	?	?	0	0	?
?	-1	?	?	?	1	2	?
F	?	?	?	0	0	2	?

- 12 -

Considere o seguinte "Quadro do Simplex":

	X	Y	Z	F1	F2	F3	TI
Y	0	1	-1	0	1/2	2	2
X	1	0	1	0	0	0	3
F1	0	0	2	1	1	2	6
F	0	0	-2	0	-1	2	10

Resolva o correspondente problema de Programação Linear.

- 13 -

Uma refinaria produz três derivados do petróleo D1, D2 e D3.

Para a produção dos referidos derivados são consumidos dois recursos: crude e energia. A tabela seguinte indica o consumo de cada recurso necessário à produção de 1 u.vol. de cada derivado.

Derivado (1 u.vol.)	Crude (barris)	Energia (u.e.)
D1	4	2
D2	2	4
D3	6	8

O lucro unitário associado aos derivados D1, D2 e D3 é, respectivamente, igual a 2, 3 e 7 u.m. . A disponibilidade mensal dos recursos é igual a 210 000 barris de crude e 180 000 u.e. de energia.

Pretende-se maximizar o lucro.

* * *

A este problema corresponde a seguinte formulação:

Sejam X, Y e Z as quantidades mensais (em u.vol.) produzidas pela refinaria de D1, D2 e D3, respectivamente.

$$\text{Max } F = 2X + 3Y + 7Z$$

sujeito a

$$4X + 2Y + 6Z \leq 210\,000$$
$$2X + 4Y + 8Z \leq 180\,000$$

$$X, \quad Y, \quad Z \geq 0$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 14 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 6X + 3Y + Z &\leq 340 \\ X + 9Y + 3Z &\leq 170 \\ X, \; Y, \; Z &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 15 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = -5X + 10Y - 30Z + 20W$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z + W &\leq 1 \\ -X + Y - 2Z + 4W &\leq 1 \\ X, \; Y, \; Z, \; W &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 16 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + 8Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 10 \\ X + 4Y &\leq 20 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 17 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y + Z &\leq 100 \\ 4X + Y + 3Z &\leq 200 \\ X, \; Y, \; Z &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 18 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + 5Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 10 \\ X + 2Y &\leq 12 \\ X + 3Y &\leq 15 \\ X, \ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 19 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{MAX } F = 2X - Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 5 \\ -X + Y &\leq 3 \\ 2X + Y &\leq 8 \\ X, \ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica, identifique a base óptima e utilizando a Formulação Matricial do Simplex, confirme a solução óptima do problema, determinada em a).

- 20 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{MAX } F = X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 8 \\ X &\leq 6 \\ Y &\leq 5 \\ X, \ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica, identifique uma s.b.a. não óptima e utilize-a como base inicial do Algoritmo Simplex Revisto para determinar a solução óptima do problema, confirmando o resultado determinado em a).

- 21 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

MAX $F = 3X + Y$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} X & \geq & 1 \\ Y & \geq & 2 \\ X + Y & \leq & 5 \\ \\ X\ ,\ Y & \geq & 0 \end{array}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica, identifique uma s.b.a. não óptima e utilize-a como base inicial do Algoritmo Simplex Revisto para determinar a solução óptima do problema, confirmando o resultado determinado em a).

- 22 -

Calcule todos os vértices do poliedro convexo seguinte:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$X, Y, Z \geq 0$.

- 23 -

Considere o seguinte Quadro do Simplex, correspondente a uma solução "intermédia" obtida na resolução de um problema de Programação Linear (cuja função objectivo se pretendia maximizar):

	A	B	C	D	E	F	TI
A	1	2/3	0	0	4/3	0	4
D	0	- 7/3	3	1	- 2/3	0	2
F	0	- 2/3	- 2	0	2/3	1	2
G	0	8/3	- 11	0	4/3	0	8

Sabendo que a inversa da matriz dos coeficientes das variáveis básicas a que esta solução corresponde é

$$\mathbf{B^{-1}} = 1/3\ .\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e que o correspondente vector C_B é [+1 +3 - 1] , formule o problema original.

- 24 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

Max $F = X + Y$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2X + Y &\geq 10 \\ X + 2Y &\leq 14 \\ 2X - 2Y &\leq 5 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Partindo da resolução gráfica, identifique a base correspondente à solução óptima.

c) Recorrendo à formulação matricial do Simplex, obtenha o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima.

- 25 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

MIN $F = -X + 2Y$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 3 \\ X + 4Y &\geq 4 \\ -X + Y &\leq 0 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Partindo da resolução gráfica, identifique a base correspondente à solução óptima.

c) Recorrendo à formulação matricial do Simplex, obtenha o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima.

- 26 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

MAX $L = 3A - 2B + 4C - 5D$

sujeito a
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A, B, C, D, E, F, G, H \geq 0$.

a) Sabendo que

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = 1/10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ -5 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

complete o Quadro do Simplex seguinte, correspondente ao problema indicado:

	A	B	C	D	E	F	G	H	TI
A									
E									
C									
F									
L									

b) Classifique, quanto à admissibilidade e optimalidade, a solução correspondente ao Quadro do Simplex anterior.

- 27 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{MAX } F = 2X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 10 \\ -X + Y &\leq 3 \\ X + 3Y &\geq 15 \\ X &\leq 5 \\ \\ X\ ,\ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Simplex Revisto, tomando como base inicial (X , Y , F_1 , F_4). Nota: F_i designa a variável de folga associada à i-ésima restrição.

b) Se o coeficiente da variável X na função objectivo puder sofrer variações, para que valores desse coeficiente se manterá óptima a solução determinada na alínea anterior ?

c) Se o coeficiente da variável X na função objectivo for igual a 1 qual a solução do problema ?

d) Relativamente ao problema original, se o termo independente da terceira restrição sofrer um aumento haverá alteração da solução óptima determinada na alínea a) ? Justifique. [Aproveite para esboçar a resolução gráfica deste problema...]

e) Se se introduzir uma nova variável não negativa Z no problema original com coeficiente (+5) na função objectivo e coeficientes 0 , +1 , 0 e +2, respectivamente na 1ª, 2ª, 3ª e 4ª restrição, manter-se-á óptima a solução determinada na alínea a) ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima do problema.

f) A introdução da restrição adicional $Y \leq 6$, no problema original altera o correspondente espaço de soluções admissíveis ? E altera a solução óptima determinada na alínea a) ? Justifique.

g) A introdução da restrição adicional $Y \geq 6$, no problema original altera o correspondente espaço de soluções admissíveis ? E altera a solução óptima determinada na alínea a) ? Justifique.

- 28 -

Considere o problema de Programação Linear apresentado no exercício **7**:

$$\text{Max } F = 2X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\le 8 \\ X + Y &\ge 5 \\ -X + Y &\le 3 \\ X - Y &\le 3 \\ X, \; Y &\ge 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Simplex Revisto, tomando como base inicial (X , Y , F_1 , F_3). Nota: F_i designa a variável de folga associada à i-ésima restrição.

Nota: Recorra às inversas das matrizes indicadas a seguir !

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 29 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y + Z &\le 100 \\ 4X + Y + 3Z &\le 200 \\ X, \; Y, \; Z &\ge 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema, utilizando o Algoritmo Simplex Revisto e tomando (X,Y) como base inicial.

- 30 -

Considere o problema **A** de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = -5X + 10Y - 30Z + 20W$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z + W &\leq 1 \\ -X + Y - 2Z + 4W &\leq 1 \end{aligned}$$

$$X, Y, Z, W \geq 0$$

a) Resolva o problema **A** , utilizando o Algoritmo Simplex Revisto e tomando (X,W) como base inicial.

b) Se o coeficiente da variável Y na função objectivo F for variável, para que domínio de variação se manteria a solução óptima determinada na alínea anterior?

- 31 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 6X + 3Y + Z &\leq 340 \\ X + 9Y + 3Z &\leq 170 \end{aligned}$$

$$X, Y, Z \geq 0$$

a) Recorrendo à formulação matricial do Simplex, verifique que a solução óptima do problema é $X^* = 50$; $Y^* = 0$; $Z^* = 40$.

b) Escreva o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima do problema.

c) Imagine que em relação ao problema dado se estuda a introdução de uma nova variável não negativa, W , com coeficiente (+4) na função objectivo F e coeficientes (+3) e (+1) na 1ª e 2ª restrição, respectivamente.

Manter-se-ia a solução óptima inicialmente apresentada ? Justifique e, em caso negativo, obtenha a nova solução óptima.

- 32 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = 5X + 6Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &\leq 16 \\ 3X + 2Y &\leq 17 \end{aligned}$$

$$X, Y \geq 0$$

a) Resolva o problema graficamente.

b) A partir da resolução gráfica, determine as variáveis que integram a base óptima e, utilizando a Formulação Matricial do Simplex, confirme a solução óptima determinada na alínea a).
c) Considere que, adicionalmente, X deveria ser inteira. Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Branch and Bound.

d) Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Branch and Bound, considerando que apenas a variável Y deveria ser inteira..

e) Considere que as variáveis X e Y são inteiras. Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Branch and Bound.

f) Compare o valor da função objectivo correspondente às soluções óptimas dos problemas resovidos nas alíneas a), c), d) e e).